Exercice 3 : 20 min 4 pts

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & si \quad x\in]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

On donne ci-contre le tableau de variation de f

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$\sqrt{2}-1$

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0<U_n\leq 1$

2°) a) Montrer que pour tout $n\in$ IN on a : $U_{n+1}\leq \frac{1}{2}U_n$

b) En déduire que U est décroissante et que $U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer la limite de la suite U.

Exercice 4 : 15 min 4 pts

On represente ci-contre la courbe (C_f) d'une fonction f et la droite $D: y=x$.

1°) Utiliser le graphique ci-dessous pour justifier la proposition suivante :
$f(x)\geq x$ pour $x\in[1,7]$.

2°) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n), \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$

Donner u_1, u_2, u_3 et u_4. Que peut-on dire da la suite (u_n) ?

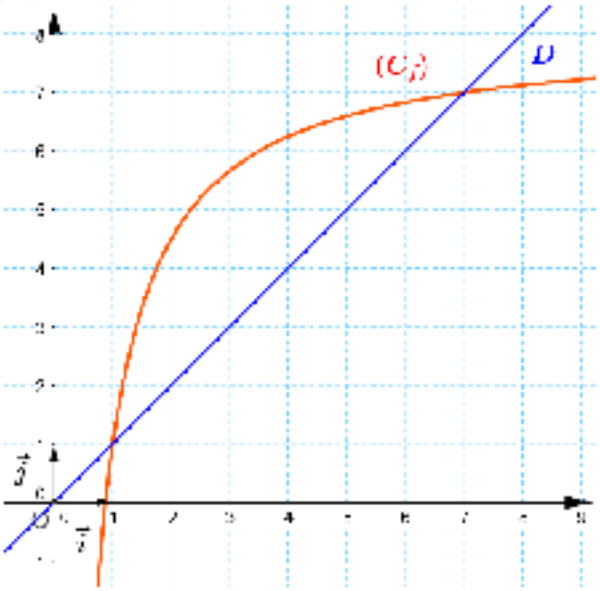
3°) Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n), \text{pour tout } n\in IN \end{cases}$

a) Placer sur l'axe des abscisses les points v_1, v_2 et v_3.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$ on a : $1\leq v_n\leq 7$.

c) Montrer que (v_n) est croissante.

d) En déduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite.



www.takiacademy.com